REDUKTION SIMULTANER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN BEI HYDRODYNAMISCHEN PROBLEMEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER PHILIPPS-UNIVERSITÄT ZU MARBURG

VORGELEGT VON

WILHELM KIRCHHOFF
AUS BRAUNSCHWEIG

MARBURG 1931

DRUCK VON WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN 1931

Diss Marburg

Als Dissertation angenommen am 13. November 1929
Berichterstatter: Herr Professor Dr. Neumann
Tag der mündlichen Prüfung: 13. November 1929

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ Band 164 Heft 3

Bekanntlich bietet die strenge Lösung hydrodynamischer Probleme, d. h. die Integration der Eulerschen Differentialgleichungen in Verbindung mit der sogenannten Kontinuitätsgleichung große Schwierigkeiten, zumal im Falle kompressibler Flüssigkeiten. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen können wir jedoch zu partikulären Lösungen gelangen. Eine Methode, solche zu finden, ist folgende: Wir versuchen, das System dieser (simultanen) Gleichungen, in denen die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, die Dichte ε und der Druck P die Unbekannten sind, zurückzuführen auf nur eine partielle Differentialgleichung, die es dann zu lösen gilt. Diese Reduktion ist unter gewissen vereinfachenden Annahmen von E. R. Neumann durchgeführt. (Crelles Journal 132, Seite 189 u. ff.)

Unter anderen Voraussetzungen will ich das Entsprechende tun, also gleichfalls das System dieser simultanen Gleichungen zurückführen auf nur eine partielle Differentialgleichung. Jede ihrer Lösungen gestattet, durch einfache Operationen die Geschwindigkeitskomponenten, die Dichte, die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen usw. zu berechnen. Das soll im ersten Paragraphen gezeigt werden. Im zweiten Paragraphen wird angegeben werden, wie partikuläre Lösungen der zunächst noch ziemlich verwickelten resultierenden Differentialgleichung gefunden werden können, indem sie auf eine einfache Form gebracht wird und zwar in dem weiter unten zu erörtenden „isothermen" Falle auf die bekannte „Telegraphengleichung" und in dem gleichfalls zu erwähnenden „adiabatischen" Falle auf eine ihr nahe verwandte Gleichung. Die beiden letzten Paragraphen enthalten Erweiterungen der Ergebnisse der beiden ersten Paragraphen.

§ 1. Die Strömungsfunktion bei eindimensionalen, nichtstationären Bewegungen.

Die unseren Ausführungen zugrunde liegenden einschränkenden Voraussetzungen sind folgende:

I. *Die Bewegung sei eindimensional und nichtstationär.* Also alle die Bewegung beschreibenden Größen seien Funktionen nur einer Raumkoordinate z und der Zeit t, mithin jederzeit für alle Teilchen einer „Schicht", d. h. einer zur z-Achse senkrechten Ebene, gleich groß. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v brauchen nicht notwendig identisch Null zu sein, sondern können gleichfalls von z und t abhängen, sich also sogar von Schicht zu Schicht und mit der Zeit ändern.

II. *Äußere Kräfte seien nicht vorhanden.*

III. *Die Dichte sei nur vom Druck abhängig.* (Der Einfluß von Reibung und Wärmeleitung wird erst in den beiden letzten Paragraphen berücksichtigt.)

Unter diesen Voraussetzungen nimmt das oben genannte System simultaner Differentialgleichungen folgendes Aussehen an:

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+w\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}+w\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$(2)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z}=0,$$

$$(3)\qquad \varepsilon=\varepsilon(P).$$

Die Lösung dieser fünf simultanen Gleichungen läßt sich zurückführen auf die Lösung nur einer partiellen Differentialgleichung, die allerdings von der zweiten Ordnung ist. Sie zeigen zunächst eine wichtige Eigenschaft: *Die letzten drei bilden für sich bereits ein „vollständiges" System simultaner Gleichungen*, weil darin von den fünf Unbekannten u, v, w, ε, P nur drei, nämlich w, ε, P vorkommen, so daß w, ε, P daraus berechnet werden können. Wenn das geschehen ist, bleibt noch mit Hilfe des für w gefundenen Ausdrucks u und v aus den ersten zwei Gleichungen (1) zu bestimmen. Diese beiden Gleichungen scheiden vorläufig aus unseren Betrachtungen aus. *Die Integration der letzten drei Gleichungen in* (1) *bis* (3) *führen wir zurück auf die Integration nur einer partiellen Differentialgleichung*, die wir jetzt gewinnen wollen.

Wir multiplizieren die dritte Gleichung (1) mit ε, die Gleichung (2) mit w, addieren beide und erhalten $\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon w^2+P)=\frac{\partial(-\varepsilon w)}{\partial t}$. Ferner ist nach (2) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial(-\varepsilon w)}{\partial z}$. Darum gibt es zunächst eine Funktion von z und t — wir nennen sie F_1 — derart, daß

$$(4)\qquad \varepsilon w^2+P=\frac{\partial F_1}{\partial t},\qquad -\varepsilon w=\frac{\partial F_1}{\partial z}$$

ist; und ferner gibt es eine Funktion F_2 von z und t derart, daß

$$(5)\qquad \varepsilon=\frac{\partial F_2}{\partial z},\qquad -\varepsilon w=\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

ist. Nun ist nach den letzten Gleichungen in (4) und (5)

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Folglich existiert eine Funktion Φ von z und t, so daß

$$(6)\qquad F_1=\frac{\partial \Phi}{\partial t},\qquad F_2=\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ist. *Alle die Bewegung beschreibenden Größen u, v, w, ε, P lassen sich als partielle Ableitungen dieser Funktion Φ darstellen, die wir Strömungsfunktion nennen wollen.* Aus (4) bis (6) ergibt sich zunächst

$$(7)\qquad \varepsilon=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\qquad w=-\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}},\qquad P=\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}.$$

Setzen wir nun die in (7) für ε und P erhaltenen Ausdrücke in (3) ein, so gelangen wir zu der gewünschten *Differentialgleichung für die Strömungsfunktion Φ, auf deren Lösung somit die Lösung der simultanen Gleichungen* (1_3) *bis* (3) *zurückgeführt ist.*

Von den in (3) enthaltenen möglichen Beziehungen wollen wir nur die beiden Fälle betrachten, die bei idealen Gasen mit der *Zustandsgleichung*

$$(8)\qquad P=\frac{R}{m}\cdot\varepsilon\vartheta$$

(wobei R die absolute Gaskonstante, m die Molmasse des betreffenden Gases und ϑ die absolute Temperatur ist) den isothermen und den adiabatischen Vorgängen entsprechen.

Im ersten Falle geht (3) in die *Boyle-Mariottesche Beziehung*

$$\frac{P}{\varepsilon} = \lambda = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \tag{9a}$$

über, wo λ eine Konstante ist, die durch ein Paar zusammengehörender Werte P_0 und ε_0 bestimmt ist. *Die Differentialgleichung der Strömungsfunktion Φ lautet dann*

$$\lambda\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{10a}$$

Im andern Falle wird aus (3) die *Poissonsche Beziehung*

$$\frac{P}{\varepsilon^{\varkappa}} = \lambda' = \frac{P_0}{\varepsilon_0^{\varkappa}}. \tag{9b}$$

λ' ist eine durch ein Paar zusammengehörender Werte P_0 und ε_0 bestimmte Konstante. $\varkappa$ ist das Verhältnis $\frac{c_p}{c_v}$ der spezifischen Wärmen der Flüssigkeit bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen. Daraus ergibt sich als *Differentialgleichung der Strömungsfunktion Φ*:

$$\lambda'\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^{\varkappa+1} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{10b}$$

(10b) enthält natürlich (10 a) als Spezialfall $\varkappa = 1$. Wir sind überhaupt nicht gehalten, in (10 b) $\varkappa$ gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärmen zu setzen, $\varkappa$ also die aus der Physik bekannten Werte $\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$ usw. zu geben, sondern wir können z. B. auch solche wählen, die zwischen den genannten Werten und 1 liegen. Mit diesen Werten für $\varkappa$ gewinnen wir Näherungsdarstellungen für diejenigen eindimensionalen nichtstationären Flüssigkeitsbewegungen, die weder völlig isotherm noch völlig adiabatisch verlaufen.

Ist (10 a) oder (10 b) unter Berücksichtigung etwaiger Randbedingungen integriert, so *berechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, die Dichte ε, der Druck P, die Wirbelkomponenten, die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen durch Differentiationen und einfache algebraische Operationen*, die stets ausführbar sind, und dasselbe gilt nach (8) im adiabatischen Falle von der Temperatur ϑ. Das soll im einzelnen jetzt ausgeführt werden.

Für die Berechnung von ε, w, P gilt (7). Der Druck P kann kürzer mit Hilfe der Formeln (9) berechnet werden:

im isothermen Falle nach (9 a)	im adiabatischen Falle nach (9 b)
$P = \lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$P = \lambda'\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^{\varkappa}$

Da wir Φ und daher auch w jetzt als bekannt ansehen, *so bestimmen wir u und v aus den ersten zwei Gleichungen* (1) *und zwar ist das in völliger Allgemeinheit möglich.* Die Lösungen lauten:

$$u = U\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right), \qquad v = V\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right), \tag{11}$$

wobei U und V beliebige Funktionen bedeuten. Sie können erst durch etwaige Randbedingungen bestimmt werden.

Bezeichnen wir noch mit $\mathfrak{c}$ die Translations- und mit $\mathfrak{u}$ die Wirbelgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, so gilt bekanntlich

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{c} \tag{12}$$

und daher für die Wirbelkomponenten ξ, η, ζ

$$(12') \qquad \xi = -V' \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad \eta = +U' \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad \zeta = 0.$$

Aus (11) und (12′) ergibt sich, da $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ nach seiner Bedeutung (7) niemals verschwinden kann, daß *die Wirbelgeschwindigkeit nur dann identisch gleich Null ist, wenn sich die Funktionen U und V auf Konstante reduzieren*, also alle Flüssigkeitsteilchen dauernd dieselben Geschwindigkeitskomponenten $\bar{u}$ und $\bar{v}$ besitzen. *Nur in diesem Fall findet demnach wirbelfreie Bewegung statt, und ein Geschwindigkeitspotential existiert.* Aus (12′) ersieht man sofort, daß sonst die Wirbellinien Gerade sind, die sämtlich der xy-Ebene parallel sind und deren Richtungen sich nur von Schicht zu Schicht ändern. Eine substantielle Betrachtung ähnlich der sogleich folgenden zeigt, *daß jede einzelne Wirbellinie bei ihrer Bewegung ihre Richtung beständig beibehält.*

Wir betrachten jetzt die Bewegung des einzelnen (substantiellen) Flüssigkeitsteilchens. Für sie gelten die folgenden simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(13) \quad \frac{dx}{dt} = u \equiv U\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \qquad \frac{dy}{dt} = v \equiv V\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \qquad \frac{dz}{dt} = w \equiv -\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}.$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt durch Integration sofort

$$(14) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \text{konst.}$$

als *die Beziehung zwischen der Koordinate z eines Flüssigkeitsteilchens (oder einer substantiellen Schicht) und der Zeit t.* Der Wert der Konstante ist durch die die Schicht charakterisierenden Anfangswerte z_0 und t_0 bestimmt, d. i. im Grunde durch irgendein Wertepaar z und t, das der betreffenden Flüssigkeitsschicht bei der Bewegung einmal entspricht. Demnach ist die Konstante in (14) gleich

$$(14') \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z_0, t_0} = c_0$$

und ändert sich somit nur von Schicht zu Schicht. Mittels (14) werden nun auch die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (13) von z_0 und t_0 abhängige Konstante, also gleich den Anfangswerten u_0 und v_0 für das betreffende Teilchen oder die betreffende Schicht:

$$\frac{dx}{dt} = u_0, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0,$$

so daß sich als *Lösungen des Systems* (13), *d. h. als endliche Bewegungsgleichungen eines (substantiellen) Teilchens die Gleichungen ergeben*:

$$(15) \qquad x - x_0 = u_0 \cdot (t - t_0), \qquad y - y_0 = v_0 \cdot (t - t_0), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = c_0.$$

$x_0, y_0, z_0, t_0, u_0, v_0$ sind dabei zusammengehörende Werte, die Anfangswerte des Teilchens. Als Folge der beiden ersten Gleichungen (15) sei noch die Formel

$$(16) \qquad \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{u_0}{v_0}$$

vermerkt oder die Tatsache, daß *alle Teilchen einer substantiellen Schicht sich in einander (und zur z-Achse) parallelen Ebenen (in kongruenten Bahnen) bewegen. Die Bahnebenen haben aber für Teilchen verschiedener Schichten im allgemeinen verschiedene Richtung.* Werden die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (13) und damit in (15) und (16)

auch die Konstanten u_0 und v_0 noch unabhängig von z_0 und t_0, nehmen sie also für alle Schichten dieselben Werte $\bar{u}$ und $\bar{v}$ an (Fall der Potentialbewegung), so sind die Bahnebenen der Teilchen aller Schichten einander parallel.

Kombinieren wir die oben für ε, w usw. gefundenen Ausdrücke mit (14), *indem wir eine der unabhängigen Variablen, entweder z oder t, eliminieren, so erhalten wir die substantielle Dichte, die substantielle Geschwindigkeit usw.* Wir nennen sie bzw. ε_s, w_s, P_s, ϑ_s, u_s, v_s usw. So gilt z. B.

$$\varepsilon_s = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2},$$

$$w_s = -\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial t}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}, \qquad \text{wobei gleichzeitig ist } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z_0, t_0} = c_0. \tag{17}$$

Eliminieren wir nun aus den drei Gleichungen (17) z und t, so resultiert eine Gleichung der Form

$$f(\varepsilon_s, w_s) = c_0. \tag{18}$$

Diese Funktion f von ε_s und w_s, die längs der Bahn eines Flüssigkeitsteilchens konstant bleibt, wird uns weiter unten noch einmal entgegentreten. *Übrigens stellt* (18) *die auf der εw-Ebene abgebildete Bahn dar, die das Flüssigkeitsteilchen (und mit ihm alle Teilchen der zugehörigen Schicht) in der zt-Ebene beschreibt* und die in dieser Ebene durch die dritte Gleichung (15) oder (17) gegeben ist. Die Abbildung wird durch die ersten zwei Gleichungen (17) bewirkt.

So sehen wir, daß bei Kenntnis der Strömungsfunktion Φ oder der Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ im wesentlichen der ganze Ablauf der Bewegung der einzelnen Teilchen bestimmt ist. — Gesagt werden muß noch, daß die durch Einführung der Strömungsfunktion Φ erhaltenen Ergebnisse zum Teil sich auch direkt aus den Gleichungen (1) bis (3) ergeben.

§ 2. Transformation der Differentialgleichungen für die Strömungsfunktion und Integration.

Da die Differentialgleichung der Strömungsfunktion (z. B. (10 a) oder (10 b)) nur zweite Differentialquotienten enthält, ist von vornherein klar, daß diese Gleichung die Funktion Φ höchstens bis auf ein additives, unbestimmt bleibendes Zusatzglied von der Form

$$\alpha z + \beta t + \gamma \tag{19}$$

bestimmt. Ein solches Glied bleibt aber nach (7) auch auf die physikalisch allein interessierenden Größen ohne Einfluß. Von dieser Unbestimmtheit abgesehen ist aber, wie sich zeigen läßt, Φ völlig bestimmt, wenn zur Anfangszeit t_0 die Dichte ε (oder der Druck P) und die Geschwindigkeitskomponente w überall als eindeutige Funktionen von z gegeben sind, oder wenn auf der Anfangsebene z_0 die Dichte (oder der Druck) und die Geschwindigkeitskomponente w als Funktionen von t gegeben sind.

Der Natur der Sache würde es entsprechen, die Lösung zu durch den physikalischen Tatbestand vorgeschriebenen Anfangsbedingungen (Randbedingungen) zu bestimmen. Wegen der Schwierigkeit dieser Aufgabe werden wir uns darauf beschränken, einige partikuläre Integrale (ohne Beachtung von Randbedingungen) anzugeben und diese physikalisch zu deuten. Dazu transformieren wir (10 a) und (10 b) in (im engeren Sinne) lineare Differentialgleichungen. Jede ihrer partikulären Lösungen führt rückwärts zu einer Lösung von (10 a) bzw. (10 b). Eines der partikulären Integrale, zu dem wir so

gelangen werden (vgl. unten (33 a)), wäre leicht auch mittels der bekannten Methode der Separation der Variabeln herzuleiten gewesen.

Um nun näher auf die Transformationsmethode einzugehen, empfiehlt es sich, statt der bisher für die Variabeln gebrauchten Bezeichnung eine zweite Bezeichnung einzuführen, nämlich statt z, t, Φ bzw. x, y, z zu schreiben und weiterhin die Ableitungen der abhängigen Variabeln z nach den unabhängigen Variabeln x, y wie folgt abzukürzen:

$$(20) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Dann lautet die Differentialgleichung (10 a) in zweiter Bezeichnung:

$$(21\text{ a}) \qquad \lambda r^2 + s^2 - rt = 0.$$

Differenzieren wir diese nach x und benutzen die erste Gleichung (20), so ergibt sich

$$(2\lambda r - t) \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2s \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} - r \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Hierin ersetzen wir t mittels (21 a) durch r und s, und ferner schreiben wir ε für r, was wir nach der (in erster Bezeichnung geschriebenen) ersten Gleichung (7) tun dürfen. Wir erhalten

$$(s^2 - \lambda\varepsilon^2) \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2\varepsilon s \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Diese Gleichung wandeln wir in eine im engeren Sinne lineare Differentialgleichung mit den unabhängigen Variabeln ε und s und der abhängigen Variabeln ζ um durch die Legendresche Transformation (Berührungstransformation)

$$(22) \qquad p = -\zeta + x\varepsilon + ys$$

und bekommen (Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre II, Seite 248)

$$(23\text{ a}) \qquad \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varepsilon^2} + 2\varepsilon s \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varepsilon\,\partial s} + (s^2 - \lambda\varepsilon^2) \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} = 0.$$

Zur weiteren Vereinfachung führen wir statt der unabhängigen Variabeln ε und s die unabhängigen Variabeln ξ und η ein mittels der Gleichungen

$$(24\text{ a}) \qquad \xi = \frac{s}{\varepsilon}, \qquad \eta = \sqrt{\lambda}\ln\varepsilon,$$

wodurch (23 a) in

$$(25\text{ a}) \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$$

übergeht. *Das ist eine (im engeren Sinne) lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ.* Die vorliegende Form ist die der gedämpften Wellen; sie wird auch Telegraphengleichung genannt. (Horn, Partielle Differentialgleichungen, Seite 352). Für (25 a) sind leicht unendlich viele partikuläre Integrale anzugeben, z. B. lassen sich aus einem Integral leicht durch Differentiation oder Integration nach ξ oder η weitere Integrale herleiten.

Nehmen wir nun einmal an, wir hätten ein beliebiges Integral $\zeta(\xi, \eta)$ von (25 a) gefunden. Dann gelangen wir zu einem Integral der ursprünglich vorliegenden Differentialgleichung (10 a), indem wir an diesem Integral die am Anfange dieses Paragraphen durchgeführten Transformationen (und die Bezeichnungsänderung, die zu (21 a) führte,) rückgängig machen. Das gefundene Integral formt sich mit Hilfe von (24 a) um in eine Funktion von ε und s und die Berührungstransformation (22) liefert

$$(26\text{ a}) \qquad p = x\varepsilon + ys - \zeta\left(\frac{s}{\varepsilon}, \sqrt{\lambda}\ln\varepsilon\right).$$

Gelingt es, aus (26 a) und den beiden Gleichungen

$$x = \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon}, \qquad y = \frac{\partial \zeta}{\partial s} \tag{27}$$

ε und s zu eliminieren, so erhalten wir für p eine Darstellung von der Form

$$p = p(x, y). \tag{28}$$

Somit folgt nach der ersten Gleichung (20)

$$z = \int p(x, y) \cdot \partial x + h(y). \tag{29}$$

Hier ist $h(y)$ eine durch die Integration hinzutretende Funktion von y, die sich durch Einsetzen der rechten Seite von (29) für z in (21 a) bestimmen läßt. *Damit ist die Strömungsfunktion z* (in zweiter Bezeichnung) *gefunden.* An dieser Stelle sei nochmals auf die im Anschluß an (19) gemachten Ausführungen verwiesen. Hinzufügen müssen wir noch, daß sich für Φ und damit auch für ε, w usw. auch mehrdeutige Funktionen ergeben können. Eine Diskussion der zugehörigen Flüssigkeitsbewegung stößt dann auf Schwierigkeiten. Die die Bewegung beschreibenden Größen ε, w usw. sind nur in gewissen Bereichen der zt-Ebene reell.

Jedoch nicht immer wird es gelingen, ε und s aus den drei Gleichungen (26 a) und (27) zu eliminieren; stets aber ist es möglich, aus diesen x und y zu entfernen, so daß wir statt zu der Darstellung (28) für p zu einer Parameterdarstellung

$$p = \overline{p}(\varepsilon, s) \tag{30}$$

gelangen. Für s setzen wir praktischer $-\varepsilon w$ und erhalten, die Funktion auf der rechten Seite jetzt f nennend,

$$p = f(\varepsilon, w).$$

(27) schreiben wir folgendermaßen, s durch $-\varepsilon w$ ersetzend:

$$x = x(\varepsilon, w), \qquad y = y(\varepsilon, w).$$

Die drei letzten Gleichungen lauten in erster Bezeichnung, (d. h. z, t, Φ sind die Variabeln):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f(\varepsilon, w), \qquad z = z(\varepsilon, w), \qquad t = t(\varepsilon, w). \tag{31}$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung stellt, gleich einer Konstante gesetzt, nach den an (18) geknüpften Ausführungen *das in der εw-Ebene liegende Abbild der Bahn eines Flüssigkeitsteilchens (einer Schicht) in der zt-Ebene dar. Die beiden andern Gleichungen* (31) *liefern uns eine Lösung der simultanen Gleichungen* (1) *bis* (3) jedoch nicht in der gewünschten „expliziten" Form $\varepsilon = \varepsilon(z, t)$ und $w = w(z, t)$, sondern *in einer „impliziten" Form,* so daß die Koordinaten z und t als Funktionen von ε und w erscheinen. *Eine graphische Darstellung durch die Kurven $f(\varepsilon, w) = konst.$, $z(\varepsilon, w) = konst.$, $t(\varepsilon, w) = konst.$ in der εw-Ebene gestattet, alle Einzelheiten der Strömung abzulesen.*

Wir geben einige Integrale für (10 a) an, die sich aus Integralen von (25 a) durch die in (26 a) bis (29) angegebenen Operationen ergeben. A bedeutet im folgenden eine beliebige Konstante.

Aus dem Integral $\zeta \equiv A \,.\, \xi$ ergibt sich das Integral

$$\Phi \equiv A \,.\, \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{t} + \lambda t \ln t \right). \tag{32 a}$$

Ebenso korrespondieren $\zeta \equiv A \,.\, (\xi^2 e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\eta} + 2\sqrt{\lambda}\,\eta \,.\, e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\eta})$ und

$$\Phi \equiv (2\lambda A)^2 \,.\, e^{\frac{z}{2\lambda A} + \frac{t^2}{8\lambda A^2} - 1}. \tag{33 a}$$

Desgleichen entsprechen einander $\zeta \equiv A \,.\, (\xi^2 - 2\sqrt{\lambda}\,\eta)$ und

$$(34a)\quad \Phi \equiv A \cdot \left\{ -\frac{z^3}{6t^2} \pm \frac{(z^2 - 4\lambda t^2)^{\frac{3}{2}}}{6t^2} + 2\lambda z \cdot \ln\left(-z \pm \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}\right) \pm 2\lambda \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2} - 4\lambda z \ln t \right\}.$$

Und ferner entsprechen einander $\zeta \equiv A \cdot (\xi^3 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\eta} + 6\sqrt{\lambda}\,\xi\,\eta\, e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\eta})$ und

$$(35a)\quad \Phi \equiv (6\lambda A)^2 \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} \right)^2 + \lambda \right\}$$
$$\cdot e^{\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{t}{3A} - \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)^2\right]}.$$

Aus diesen Integralen Φ berechnen sich nach den Angaben im ersten Paragraphen ε, w usw. durch leicht ausführbare Operationen, wobei wir bei den einfacheren unter den genannten Integralen zu Lösungen der Gleichungen (1) bis (3) gelangen, die auch unschwer aus diesen direkt zu gewinnen gewesen wären.

Zur Diskussion des Integrals (32 a) berechnen wir nach den Vorschriften des ersten Paragraphen aus der in (32 a) vorliegenden Strömungsfunktion Φ die Dichte, die Geschwindigkeitskomponenten, die Bahnen usw. Bei $A > 0$ ist Φ einer physikalischen Deutung fähig für alle die Wertepaare z und t, bei denen $t > 0$ ist. Die Dichte ε ist nur von t abhängig und nimmt ab, wenn t wächst. Die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich auf Geraden, die bei Potentialbewegung sämtlich einander parallel sind. Bei Wirbelbewegung sind nur die Bahngeraden der derselben Schicht angehörenden Teilchen parallel. Während der Bewegung nimmt die substantielle Dichte ε_s ab, die substantielle Geschwindigkeitskomponente w_s ist eine von Schicht zu Schicht verschiedene Konstante. Die Lösung (32 a) stellt eine isotherme Expansion einer Flüssigkeit (eines Gases) dar; bei $A < 0$ würde eine isotherme Kompression vorliegen.

Zur Diskussion des Integrals (33 a) geben wir an: Die Flüssigkeit bewegt sich mit räumlich gleicher, aber zeitlich veränderlicher Geschwindigkeitskomponente w. Die substantielle Dichte ε_s jedes Teilchens ist während der ganzen Bewegung eine von Teilchen zu Teilchen verschiedene Konstante. Die Flüssigkeit verhält sich demnach, falls die Bewegung wirbelfrei ist, wie ein starrer Körper, (der in bezug auf seine Dichte inhomogen ist). Die Flüssigkeitsteilchen beschreiben parabolische Bahnen, die bei wirbelfreier Bewegung sämtlich kongruent sind, während bei Wirbelbewegung nur die Bahnen der Teilchen ein und derselben (substantiellen) Schicht einander kongruent sind.

Aus der Lösung (34 a) ergibt sich für die Dichte ε, die Geschwindigkeitskomponente w und die Bahnen:

$$\varepsilon = -A \cdot \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{t^2}, \qquad w = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{2t}$$
$$\left(\frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{2t}\right)^2 - 2\lambda \ln\left(\frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{t^2}\right) = c_0,$$
$$x - x_0 = u_0 \cdot (t - t_0), \qquad y - y_0 = v_0 \cdot (t - t_0).$$

Das Geradenpaar $z^2 - 4\lambda t^2 = 0$ teilt die zt-Ebene in vier Teile. ε, w usw. sind, wie die Formeln zeigen, nur in den von der z-Achse durchzogenen beiden Teilen reell. Da ε nur in einem dieser beiden Teile größer als Null, im andern dagegen kleiner als Null ist, so ist die Lösung (34 a) im Falle $A < 0$ nur in dem Teil der zt-Ebene der physikalischen Deutung fähig, der die positive z-Achse enthält, im Falle $A > 0$ in dem Teile, der die negative z-Achse enthält. Bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens vor der Wurzel in den angeführten Formeln wird auf der z-Achse $w = 0$, bei Gültigkeit des unteren wird auf der

z-Achse $w = \infty$. Im letzteren Falle ist darum eine physikalische Deutung auch für alle Punkte der z-Achse unmöglich. Wir beschränken die Diskussion auf das obere Vorzeichen und auf $A < 0$. Das Integral stellt die Bewegung einer Flüssigkeit von räumlich verschiedener Dichte dar, die aus einer Expansion und darauf folgender Kompression besteht. Jedes Flüssigkeitsteilchen erreicht zur Zeit $t = 0$ den Punkt seiner Bahn, dessen Koordinate z am kleinsten ist. Wenn t von negativen zu positiven Werten fortschreitet, wächst w von negativen Werten zu positiven Werten an. Wie bereits angegeben, ist für $t = 0$ überall $w = 0$. Je größer z ist, desto kleiner ist bei gleichem t die Dichte. Zur Zeit $t = 0$ erreicht sie überall ihren kleinsten Wert, der von Schicht zu Schicht verschieden ist.

Aus dem partikulären Integral (35a) gewinnen wir auf dem im ersten Paragraphen angegebenen Wege u. a. die Formeln

$$\varepsilon = e^{\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{t}{3A} - \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)^2\right]},$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}},$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)$$

$$\cdot e^{\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{t}{3A} - \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)^2\right]} = c_0,$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right) \cdot \varepsilon_s = c_0, \qquad w_s \cdot e^{\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{t}{3A} - w_s^2\right)} = c_0,$$

$$\varepsilon_s \cdot w_s = c_0.$$

Die Formeln ergeben außerhalb des von den Geraden $z = \pm 4\lambda^{\frac{3}{2}}A$ eingeschlossenen Gebietes der zt-Ebene einen reellen Wert für ε, w, z usw., innerhalb jedoch drei reelle Werte. Einer physikalischen Deutung ist die Lösung (35a) ohne weiteres fähig außerhalb des genannten Gebietes. Wie die Verhältnisse innerhalb liegen, würde eine graphische Darstellung der Bewegung in der zt-Ebene (oder auch deren Abbildung auf der εw-Ebene) zeigen. Insbesondere ergibt sich, daß die Koordinate z jeder Bahn nicht für alle t reell ist. Wir beschränken uns darauf, die Lösung für $A > 0$ und für alle $z > 4\lambda^{\frac{3}{2}}A$ zu deuten. Die Flüssigkeit strömt von Orten höherer Dichte ε (also höheren Drucks) mit wachsender substantieller Geschwindigkeitskomponente w_s zu Orten niedrigerer Dichte (also niedrigeren Drucks). Dabei wird im Laufe der Zeit die Dichte ε überall zunehmen. Die Geschwindigkeitskomponente w ist nur vom Orte abhängig. Die Bahnen sind Kurven, deren Krümmung bei wachsendem z abnimmt. Im Laufe der Bewegung wird die Koordinate z jedes Flüssigkeitsteilchens größer. Ist $A < 0$ und $z > 4\lambda^{\frac{3}{2}}A$, so bewegt sich die Flüssigkeit von Orten niedrigerer Dichte mit absolut abnehmender Geschwindigkeitskomponente w_s zu Orten höherer Dichte, wobei die Koordinate z jedes Flüssigkeitsteilchens immer kleiner wird. Die Dichte ε nimmt im Laufe der Zeit überall ab.

Die für den adiabatischen Fall gültige Differentialgleichung (10b) transformieren wir in ähnlicher Weise, wie das mit der für den isothermen Fall gültigen Differentialgleichung (10 a) geschehen ist, und erhalten schließlich durch die Legendresche Transformation

$$p = -\zeta + x\varepsilon + ys$$

und die Transformation

(24 b) $$\frac{s}{\varepsilon} = \xi, \qquad \frac{2\sqrt{\lambda' \varkappa}}{\varkappa - 1} \cdot \varepsilon^{\frac{\varkappa - 1}{2}} = \eta$$

die (25 a) entsprechende Gleichung

(25 b) $$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \frac{\varkappa - 3}{\varkappa - 1} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0.$$

Das ist gleichfalls eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ.

Wir nennen nun einige Integrale von (25 b) und dahinter diejenigen Integrale von (10 b), die aus den zuerst genannten durch Rückwärtstransformieren hervorgehen. A sei dabei eine beliebige Konstante.

Aus dem Integral $\zeta \equiv A \cdot \xi$ der Differentialgleichung (25 b) ergibt sich ein Integral der Differentialgleichung (10 b), nämlich

(32 b) $$\Phi \equiv \frac{1}{2} \cdot A \cdot \frac{z^2}{t} + \lambda' A^{\varkappa} \cdot \frac{1}{(\varkappa - 1)(\varkappa - 2)} \cdot t^{2 - \varkappa}.$$

Ebenso korrespondieren miteinander

$$\zeta \equiv A \cdot \left(\xi^2 \eta^{\frac{2}{\varkappa - 1}} + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \cdot \eta^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}} \right) \qquad \text{und}$$

(33 b) $$\Phi \equiv B \cdot \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa - 1} \cdot \left(\frac{1}{4 \alpha A} \cdot t^2 + z \right)^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa - 1}},$$

wobei die Abkürzungen B und α erklärt sind durch die Gleichungen

$$B = A^{\frac{-1}{\varkappa - 1}} \cdot \alpha^{\frac{-\varkappa}{\varkappa - 1}} \cdot \varkappa^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \cdot (\varkappa - 1)^{\frac{\varkappa - 2}{\varkappa - 1}}, \qquad \alpha = \left(\frac{2\sqrt{\lambda' \varkappa}}{\varkappa - 1} \right)^{\frac{2}{\varkappa - 1}}.$$

Desgleichen korrespondieren miteinander

$$\zeta \equiv A \cdot \left(\xi^3 \eta^{\frac{2}{\varkappa - 1}} + \frac{3(\varkappa - 1)}{2\varkappa} \cdot \xi \eta^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}} \right) \qquad \text{und}$$

(35 b) $$\Phi \equiv - \frac{A \beta^2 (\varkappa - 1)^2}{6\alpha} \cdot \left(\frac{A \beta (3\varkappa - 1)}{3\varkappa - 2} \cdot \left\{ \frac{t}{A\beta} - \frac{3\alpha}{\beta} w^2 \right\}^{\frac{3\varkappa - 2}{\varkappa - 1}} - \frac{2\varkappa}{2\varkappa - 1} \cdot t \left\{ \frac{t}{A\beta} - \frac{3\alpha}{\beta} w^2 \right\}^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa - 1}} \right),$$

wobei die Abkürzungen α, β, w die in den folgenden Gleichungen angegebenen Bedeutungen haben:

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{2\lambda' \varkappa}}{\varkappa - 1} \right)^{\frac{2}{\varkappa - 1}}, \qquad \beta = \frac{3(\varkappa - 1)}{2\varkappa} \cdot \alpha^{\varkappa},$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} + \sqrt{\left(\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^2 - \left(\frac{(\varkappa - 1) t}{3\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} - \sqrt{\left(\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^2 - \left(\frac{(\varkappa - 1) t}{3\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^3}}.$$

Die Lösung (32 b) stellt ähnlich wie (32 a) eine Expansion oder Kompression dar, (die jedoch hier adiabatisch verlaufen), je nachdem $A \gtrless 0$ ist. Die Temperatur ϑ ist nur von der Zeit abhängig.

Die durch (33 b) definierte adiabatische Bewegung entspricht der in (33 a) enthaltenen isothermen. Die substantielle Temperatur ϑ_s ist eine von Schicht zu Schicht verschiedene Konstante. Im übrigen gilt dasselbe, was von (33 a) ausgesagt wurde.

Für (35 b) gilt ähnliches wie für (35 a). Es sei $A > 0$ vorausgesetzt. Innerhalb des von der semikubischen Parabel

$$\left(\frac{z}{2\alpha A(3\varkappa-1)}\right)^2=\left(\frac{(\varkappa-1)t}{3\alpha A(3\varkappa-1)}\right)^3$$

abgegrenzten, die positive $t=$ Achse enthaltenden Gebietes der zt-Ebene besitzen ε, w usw. drei reelle Werte, außerhalb nur einen. Auf der semikubischen Parabel

$$\left(\frac{z}{2\alpha A}\right)^2=\left(\frac{t}{3\alpha A}\right)^3$$

ist $\varepsilon=0$, so daß eine physikalische Deutung der Lösung (35b) bei $A>0$ nur innerhalb des von dieser Kurve abgegrenzten, die positive t-Achse enthaltenden Gebietes der zt-Ebene möglich ist, da nur hier überall $\varepsilon>0$ ist. In dem außerhalb der ersten, jedoch innerhalb der zweiten semikubischen Parabel gelegenen Gebiete besteht die Bewegung in einer adiabatischen Expansion der Flüssigkeit. Bei $A<0$ liegt eine adiabatische Kompression vor.

§ 3. Die Strömungsfunktion bei Berücksichtigung der inneren Reibung.

Berücksichtigen wir nun auch den in den vorangehenden Paragraphen vernachlässigten Einfluß der inneren Reibung, so haben wir statt (1) bis (3) zu schreiben:

$$\text{(36)}\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\varrho'+2\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$\text{(37)}\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z}=0,$$

$$\text{(38)}\qquad \varepsilon=\varepsilon(P).$$

Dabei sind ϱ und ϱ' die beiden von der Natur der Flüssigkeit abhängenden Reibungskoeffizienten. (Inkompressible Flüssigkeiten besitzen dagegen nur einen Reibungskoeffizienten.) Wir setzen sie als konstant voraus und schreiben kurz μ für $\varrho'+2\varrho$. Der dritten Gleichung (36) können wir die Form

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(P-\mu\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

geben. Benutzen wir noch die Abkürzung

$$P'=P-\mu\cdot\frac{\partial w}{\partial z},$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P'}{\partial z}.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der dritten Gleichung (1) überein. Folglich können wir in der gleichen Weise, wie es im ersten Paragraphen geschehen ist, eine Funktion Φ einführen, die wir auch hier Strömungsfunktion nennen wollen, so daß (7) entsprechend die Gleichungen gelten:

$$\text{(39)}\qquad \varepsilon=\frac{\partial\Phi^2}{\partial z^2},\qquad w=-\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}},\qquad P=\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2}{\dfrac{\partial\Phi^2}{\partial z^2}}-\mu\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}\right).$$

Mittels (38) folgt sodann als *Differentialgleichung der Strömungsfunktion* (ähnlich wie im ersten Paragraphen) im isothermen Falle

$$\text{(40a)}\qquad \lambda\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\mu\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}\right)=0$$

und im adiabatischen Falle

$$(40\,b)\qquad \lambda'\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^{\varkappa+1}+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\mu\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}\right)=0.$$

Auf die Integration einer dieser beiden Differentialgleichungen, je nachdem ob Isothermie oder Adiabasie vorausgesetzt ist, wäre somit die Integration der simultanen Gleichungen (36_3) *bis* (38) *zurückgeführt.*

Nachdem Φ aus (40a) oder (40b) berechnet und daraus nach Vorschrift (39) ε, w, P als Funktionen von z und t bestimmt worden ist (P läßt sich kürzer aus ε berechnen), lassen sich die ersten zwei Gleichungen (36) lösen. Ihre Lösungen, die jedoch nicht mehr die einfache Form (11) besitzen, sind Funktionen von z und t; sie können aber auch mit Konstanten identisch sein. Im ersten Falle liegt Wirbelbewegung vor, im zweiten Potentialbewegung. (Obgleich die Flüssigkeit innere Reibung besitzt, ist eine sich erhaltende Potentialbewegung unter den zugrunde gelegten vereinfachenden Annahmen des ersten Paragraphen möglich.)

Einige Integrale von (40a) und (40b) lassen sich leicht angeben. Dabei sei bemerkt, daß wie im ersten Paragraphen auch hier die Lösungen höchstens bis auf den additiven Ausdruck $\alpha z+\beta t+\gamma$ bestimmt sind.

Aus (32a) bzw. (32b) gewinnen wir durch eine einfache Erweiterung bzw. die Integrale

$$(41\,a)\qquad \Phi=A\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{t}+\lambda t\ln t\right)-\mu t\ln t,$$

$$(41\,b)\qquad \Phi=\frac{1}{2}A\cdot\frac{z^2}{t}+\lambda' A^{\varkappa}\cdot\frac{1}{(\varkappa-1)(\varkappa-2)}\cdot t^{2-\varkappa}-\mu t\ln t,$$

die (40a) bzw. (40b) befriedigen. Ferner genügt das Integral (33a) ohne jede Änderung der Differentialgleichung (40a) und das Integral (33b) der Differentialgleichung (40b).

§ 4. Die Strömungsfunktion bei Berücksichtigung der inneren Reibung und der inneren Wärmeleitung.

Berücksichtigen wir bei unseren Betrachtungen der eindimensionalen nichtstationären Flüssigkeitsbewegung den Einfluß der inneren Reibung und der inneren Wärmeleitung, so müssen wir statt der fünf Gleichungen (36) bis (38) hier sechs simultane Gleichungen heranziehen, nämlich als sechste die Differentialgleichung der Wärmeleitung für strömende Flüssigkeiten. Es sind die Gleichungen:

$$(42)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\varrho'+2\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$(43)\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z}=0,$$

$$(44)\qquad P=\frac{R}{m}\cdot\varepsilon\vartheta,$$

$$(45)\qquad l\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=\varepsilon c_v\cdot\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)-\frac{R}{m}\cdot\vartheta\cdot\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right).$$

Die Gleichung (44) ist die uns schon in (8) begegnete Zustandsgleichung. In (45) bedeutet l die (innere) Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit, die wir als konstant voraussetzen. Ähnlich wie im vierten Paragraphen können wir auch hier eine Strömungsfunktion Φ einführen, so daß die Gleichungen bestehen:

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad w = -\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}, \qquad P = \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\cdot\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} - \mu\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right),$$

(46)

$$\vartheta = -\frac{m}{R}\cdot\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z}}\right)^2 + \frac{m}{R}\cdot\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} - \frac{m\mu}{R}\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right).$$

Setzen wir die für ε, w, ϑ soeben angegebenen Ausdrücke in (45) ein, so bekommen wir *die Differentialgleichung der Strömungsfunktion* Φ. Da bekanntlich $\dfrac{R}{m} = c_p - c_v$ ist, lautet sie

$$(47)\quad l\cdot\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + c_v\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi - (c_p - c_v)\cdot\Psi\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$-\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right)^2 + \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} - \mu\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right) = \Psi$$

gesetzt ist. In (47) liegt eine partielle Differentialgleichung fünfter Ordnung für Φ vor. *Auf ihre Lösung ist damit die Lösung der vier simultanen Gleichungen* (42_3) *bis* (45) *zurückgeführt.* (47) enthält alle in den vorangehenden Paragraphen genannten Differentialgleichungen für Φ als Sonderfälle.

Einige Integrale lassen sich angeben. Auch diese sind nur bestimmt bis auf den additiven Ausdruck der Form $\alpha z + \beta t + \gamma$. So wird (47) durch das Integral (41b) erfüllt. Ferner sind (33a) und (33b) Lösungen von (47), bei denen wir hier ebenso wie im zweiten Paragraphen sehen, daß die Geschwindigkeitskomponente w räumlich, aber nicht zeitlich konstant ist, daß die substantielle Dichte und der substantielle Druck während der ganzen Bewegung unverändert bleiben und beide nur von der Anfangslage der (substantiellen) Schicht abhängen, der das betreffende Teilchen angehört. Die Temperatur ist bei (33a) zeitlich und räumlich konstant, bei (33b) ist die substantielle Temperatur eine von der Anfangslage der Schicht abhängige Konstante. Im Falle der Potentialbewegung, d. h. wenn u und v konstant sind, verhält sich also die Flüssigkeit wie ein starrer Körper, der in bezug auf seine Dichte inhomogen ist. *Alles, was soeben über die Integrale* (33a) *und* (33b) *ausgesagt wurde, gilt, obwohl Reibung und Wärmeleitung bei der Flüssigkeit vorhanden sind.* Endlich sei noch als Lösung von (47)

$$\Phi \equiv \iint \frac{1}{ac_v z^2 + bz + d}\cdot dz\,dz + \iint e^{-2alt+f}\cdot dt\,dt$$

genannt, wobei a, b, d, f Konstante sind. Anwendung der Formeln (46) ergibt in diesem Falle:

$$\varepsilon = \frac{1}{ac_v z^2 + bz + d}, \qquad w = 0, \qquad P = e^{-2alt+f},$$

$$\vartheta = \frac{m}{R}(ac_v z^2 + bz + d)\cdot e^{-2alt+f}.$$

Lebenslauf

Ich, Ernst August Heinrich Wilhelm Kirchhoff, bin der Sohn des Postassistenten Wilhelm Kirchhoff in Braunschweig und seiner Ehefrau Hermine, geb. Schrader. Mein Geburtstag ist der 18. Mai 1896, mein Geburtsort Friedland im Kreise Göttingen. Ich besitze die braunschweigische Staatsangehörigkeit und bin evangelisch-lutherischen Bekenntnisses.

Von Ostern 1902 bis Ostern 1910 besuchte ich die dritte mittlere Knabenbürgerschule in Braunschweig, darauf bis Juni 1915 das dortige Lehrerseminar. Ich bestand Juni 1915 und September 1917 die beiden Lehrerprüfungen, Ostern 1919 die Reifeprüfung an der Johann-Albrecht-Oberrealschule in Braunschweig und Juni 1921 die Mittelschullehrerprüfung. Von 1915 bis zum Universitätsstudium stand ich mit Unterbrechung durch Heeresdienst als Volksschullehrer und dann als Mittelschullehrer im braunschweigischen Staatsdienst.

Vom Sommersemester 1925 bis Sommersemester 1927 studierte ich an der Technischen Hochschule in Braunschweig Mathematik, Physik, Chemie und angewandte Mathematik, sodann vom Wintersemester 1927/28 bis Sommersemester 1929 an der Philipps-Universität in Marburg gleichfalls Mathematik, Physik, Chemie und angewandte Mathematik.

Anfang November 1929 legte ich in Marburg die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Das Rigorosum bestand ich am 13. November 1929. Seitdem halte ich mich als Studienreferendar in Braunschweig auf.

Meine akademischen Lehrer waren
in Braunschweig: Bergwitz, Dießelhorst, Fricke, Fries, Gronau, Harbert, Krauß, Moog, Roth, Timerding,
in Marburg: Anschütz, von Auwers, Berek, Fraenkel, Frank, Grüneisen, Hensel, Jaeck, Jaensch, Krafft, Lipps, Luckey, Neumann, F. A. Schulze, Schwantke, Strecker, Tomaschek, Valeton.

Ihnen allen sage ich meinen besten Dank. Zu dauernder Dankbarkeit bin ich Herrn Professor Dr. Neumann verpflichtet für die vielfache Förderung meiner wissenschaftlichen Ausbildung wie für die mannigfachen Hinweise bei der Anfertigung dieser Arbeit, die auf seine Anregung hin entstanden ist.